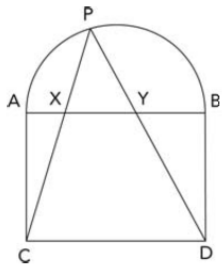
EEN MEETKUNDIG PROBLEEM VAN FERMAT

Dick Klingens

In de papieren versie van *Euclides* jaargang 89 nummer 3 schrijft Dick Klingens over de Prosthaphairesis. Hier vindt u zijn artikel over een meetkundig probleem van Fermat. Dick geeft twee oplossingen waarvan er een gebaseerd is op analytische meetkunde. Het levert interessante raakvlakken op met de huidige en/of toekomstige bovenbouwstof.

'De schatkamer' van Ian Stewart [1] is – zoals hij in vertaling schrijft – gevuld met een selectie van wiskundige rariteiten, die hij in schriften verzamelde. Ik heb dergelijke schriften niet, maar wel een map, niet om rariteiten in te bewaren, maar onder andere voor opgaven die ik zou kunnen (of eigenlijk kon) gebruiken bij schoolonderzoeken e.d. Ik weet het, een map is niet handig: dat wat je uit een map haalt, moet er ook weer in terug, en uit ervaring weet ik ook dat dat laatste, althans bij mij, niet altijd het geval was. Op pagina 61 in de 'De schatkamer' staat figuur 1 met de erbij vermelde tekst.



figuur 1

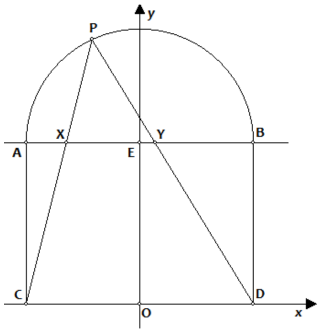
Probleem van Fermat: Teken een rechthoek waarvan AB is $\sqrt{2} \times$ AC, teken daar een halve
cirkel bovenop en kies hierop een willekeurig punt P. Construeer de punten X en Y zoals in de tekening. Bewijs dat $AY^2 + BX^2 = AB^2$.

Ik herkende het plaatje meteen: het zou in mijn map moeten zitten. En inderdaad, maar bij mij – evenals in 'De schatkamer' – *zonder* oplossing van het probleem (is die toch uit de map verdwenen?). Het moet er dan nu maar (weer?) van komen. Ik geef **twee** verschillende bewijzen. Het eerste is gebaseerd op analytische meetkunde [2]; het tweede is, na wat handige substituties, redelijk elementair.

Eerste bewijs

Ik kies het midden O van CD als oorsprong van een rechthoekig assenstelsel waarvan de x-as samenvalt met de lijn door C en D; zie figuur 2.[3]
Verder kies ik de eenheid zó, dat $OD = 1$; dus $D = (1, 0)$ en $C = (-1, 0)$.
Op grond van de gegevens bij figuur 1 is dan voor het snijpunt E van de y-as met de lijn AB: $E = (0, \sqrt{2})$.
En verder: $A = (-1, \sqrt{2})$ en $B = (1, \sqrt{2})$.

In dit assenstelsel is een vergelijking van de (halve) cirkel:
$x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$



figuur 2

Vervolgens bepaal ik de x-coördinaten van de punten X en Y door de lijn AB (evenwijdig met de x-as, en met vergelijking $y = \sqrt{2}$) te snijden met de lijnen PC en PD.
Als $P = (p, q)$ is, dan zijn de vergelijkingen van die lijnen:

$PC: y-q=\frac{q}{p+1}(x-p)$ en $PD: y-q=\frac{q}{p-1}(x-p)$

Voor de x-coördinaat x_X van het punt X is dan:

$x_X=\frac{(\sqrt{2}-q)(p+1)}{q}+p$; en voor de x-coördinaat x_Y van het punt Y is: $x_Y=\frac{(\sqrt{2}-q)(p-1)}{q}+p$.

Daarmee is:

$AY^2=(\frac{(\sqrt{2}-q)(p-1)}{q}+p+1)^2$ en

$BX^2=(\frac{(\sqrt{2}-q)(p+1)}{q}+p-1)^2$

Zodat, met $L = AY^2 + BX^2$:

$$L=\frac{1}{q^2}((\sqrt{2}-q)(p-1)+pq+q)^2+\frac{1}{q^2}((\sqrt{2}-q)(p+1)+pq-q)^2$$

Of:

$$L=\frac{1}{q^2}(p\sqrt{2}-\sqrt{2}+2q)^2+\frac{1}{q^2}(p\sqrt{2}+\sqrt{2}-2q)^2$$

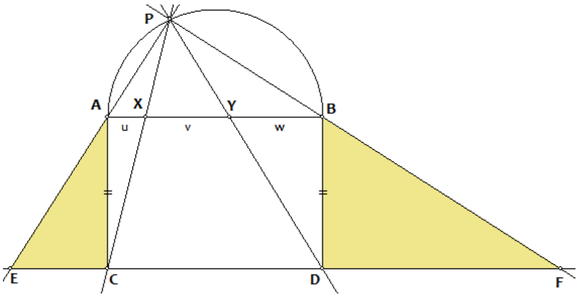
Verder uitgewerkt:

$$L=\frac{1}{q^2}(4p^2+4+8q^2-8q\sqrt{2})=\frac{4}{q^2}(p^2+1+2q^2-2q\sqrt{2})$$

Omdat P op de cirkel ligt, voldoen de coördinaten van P ook aan $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$, zodat:
$p^2 = 1 - (q - \sqrt{2})^2 = -1 - q^2 + 2q\sqrt{2}$
En daarmee is: $L=\frac{4}{q^2}\cdot q^2=4=AB^2$
Inderdaad: $AY^2 + BX^2 = AB^2$

Tweede bewijs

Met $AX = u$, $XY = v$ en $YB = w$ is (zie figuur 3):
$L = AY^2 + BX^2 = (u + v)^2 + (v + w)^2 = u^2 + 2v^2 + w^2 + 2uv + 2vw$
of ook:
$L = u^2 + 2v^2 + w^2 + 2uv + 2vw + \underline{2uw} - \underline{2uw} = (u + v + w)^2 + v^2 - 2uw$
Of: $L = AB^2 + (v^2 - 2uw)$



figuur 3

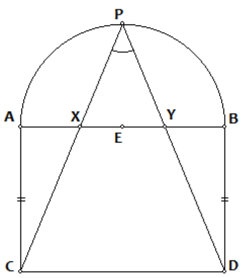
Ik kan dus ook proberen te bewijzen dat $v^2 - 2uw = 0$
c.q. dat: $XY^2 = 2 \cdot AX \cdot YB$
En dat doe ik hierna

In figuur 3 zijn – na het tekenen van de rechte lijnen *PAE* en *PBF* – drie gelijkvormige rechthoekige driehoeken *PAB* (een *'Thales-driehoek'* op *AB*), *CEA* en *DBF* te zien.
Uit de gelijkvormigheid van de laatste twee driehoeken volgt:
$CE : DB = CA : DF$ of $CE \cdot DF = DB \cdot CA$
Met $DB = CA = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ blijkt nu: $CE \cdot DF = (\frac{AB}{\sqrt{2}})^2 = \frac{AB^2}{2}$.
Dus: $AB^2 = 2 \cdot CE \cdot DF = CD^2$
Wegens de centrale projectie met centrum *P* van de lijn *EF* op de lijn *AB* geldt ook:

(*)... $XY^2 = 2 \cdot XA \cdot YB$
En dat is precies wat ik wilde aantonen.

Extra

Bij het plaatje in mijn map trof ik nog wel een korte notitie van mijn hand aan: 'Als *P* het midden is van de cirkelboog, dan is $\angle CPD = 45°$.'



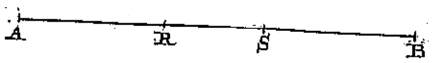
Ik denk dat de lezer niet veel moeite zal hebben die uitspraak te bewijzen.

En bij deze ligging van het punt *P* is het natuurlijk een stuk eenvoudiger om na te gaan dat $AY^2 + BX^2 = AB^2$.

Leonhard Euler

In het bovenstaande komt twee keer de naam *Fermat* voor. Stewart schrijft daarover in [1]:
'Sir Kenelm Digby [1603-1665] was diplomaat onder koning Karel I van Engeland. Zijn relatie met Euler loopt via Fermat, die Digby in 1658 een meetkundig probleem [het onderhavige; DK] toestuurde. De brief zelf is verloren gegaan, maar Digby stuurde een kopie aan John Wallis, en die is bewaard gebleven. Euler, die systematisch probeerde om alles te lezen wat Fermat had geschreven, hoorde van het probleem en loste het op.'

In [4] beschrijft Ed Sandifer die oplossing van Euler, waarbij de laatste onder meer de volgende eigenschap gebruikt.



§. 2. Si linea recta AB vtcunque ſecetur in duobus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in partem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus extremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS et BR, ſeu erit: AB . RS + AR . BS = AS . BR.

§. 2. Als het lijnstuk AB willekeurig verdeeld wordt door twee punten R en S, [dan] is de rechthoek op het gehele [lijnstuk] AB en het middelste stuk RS samen met de rechthoek op de uiterste stukken AR en BS gelijk aan de rechthoek op de stukken AS en BR; dus is: AB · RS + AR · BS = AS · BR .[5]

Euler geeft **twee** bewijzen van deze eigenschap. Het **eerste** bewijs is algebraïsch van aard; ik volg het onderstaand op de voet.

Er geldt: $AB = AS + BS$

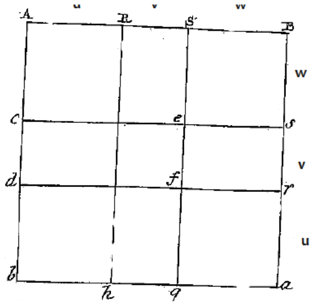
Aan beide kanten vermenigvuldigd met *RS*:
$AB \cdot RS = AS \cdot RS + BS \cdot RS$

En aan beide kanten erbij opgeteld $AR \cdot BS$:
$AB \cdot RS + (AR \cdot BS) = AS \cdot RS + BS \cdot RS + (AR \cdot BS)$

In het rechter lid is dan:
$BS \cdot RS + AR \cdot BS = BS(RS + AR) = BS \cdot AS$

En dan is ook [het gehele rechter lid]:
$AS \cdot RS + BS \cdot AS = AS(RS + BS) = AS \cdot BR$
Dus is: $AB \cdot RS + AR \cdot BS = AS \cdot BR$

In het **tweede** bewijs van de eigenschap maakt Euler 'echt' gebruik van oppervlaktes van rechthoeken; zie figuur 4.[6]



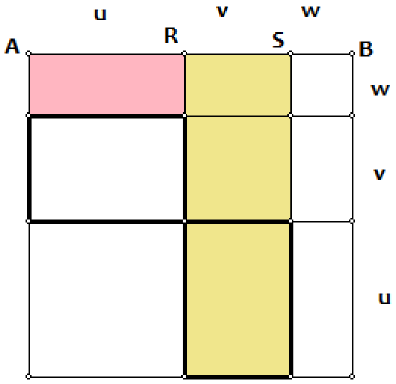
figuur 4

Het lijnstuk AB (met daarop de punten R en S) wordt gekopieerd als lijnstuk aB (met daarop de punten r en s) en wordt gebruikt voor het vormen van een vierkant $ABab$. En hierbij is: $AR = ra = hb = u$, $RS = sr = qh = v$, $SB = Bs = aq = w$

Door op verschillende manieren rechthoeken samen te voegen bewijst Euler meetkundig dat (in 'onze' notatie):
$(u + v + w) \cdot v + uw = (u + v)(v + w)$

En hoe eenvoudig is het als je het zo opschrijft...

Zie ook figuur 5. En hoe eenvoudig is het als je het zo tekent...



figuur 5

Euler lost het probleem van Fermat dan als volgt op. Eerst bewijst hij de relatie $XY^2 = 2 \cdot XA \cdot YB$, die hierboven in de paragraaf 'Tweede bewijs' staat, op ongeveer dezelfde manier als dat is gedaan in die paragraaf – dus met gelijkvormigheid van driehoeken.

Met $X \equiv R$ en $Y \equiv S$ vindt hij: $RS^2 = 2 \cdot AR \cdot BS$.

Omdat: $AS + BR = AB + RS$

is het kwadraat hiervan:

$AS^2 + 2 \cdot AS \cdot BR + BR^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot RS + \underline{RS^2}$

Nu wordt gesubstitueerd: $\underline{RS^2} = 2 \cdot AR \cdot BS$

En dat geeft: $AS^2 + \underline{2 \cdot AS \cdot BR} + BR^2 = AB^2 + \underline{2 \cdot AB \cdot RS + 2 \cdot AR \cdot BS}$

Met de aan het begin van deze paragraaf bewezen eigenschap blijft over: $AS^2 + BR^2 = AB^2$

Noten

[1] Met 'De schatkamer' wordt verwezen naar het boek: Ian Stewart (2010): *Professor Stewart's schatkamer vol wiskundige uitdagingen.* Hilversum: Uitgeverij Lias (ISBN: 978 90 8803 006 2 / januari 2012) Oorspronkelijke titel: *Professor Stewart's Hoard of Mathematical Treasures.* Zie ook de boekbespreking door C. van der Heijden in *Euclides* 89(1); pp. 30-33.

[2] Zie het eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde: cTWO (2012): *Denken & doen / wiskunde op havo en vwo 2015.* Utrecht: commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. Te downloaden (pdf; ca. 20 Mb) via: *www.fisme.science.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf.* Daarin staat in de paragraaf *Specificaties Wiskunde B vwo* (pag. 196) onder meer:
Domein E: Meetkunde met coördinaten (170 *slu*)
Subdomein E1: Meetkundige vaardigheden 14:
De kandidaat kan eigenschappen van meetkundige objecten onderzoeken en bewijzen en kan daarbij gebruik maken van meetkundige en algebraïsche technieken en van ICT.

[3] De lezer ga na (uiteraard alleen als hij dat wil) dat de keuze van het midden E van AB als oorsprong van het assenstelsel (meer voor de hand liggend?) tot iets meer rekenwerk leidt.

[4] C.E. Sandifer (2008): *How Euler Did It / A Forgotten Fermat Problem.* HEDI 62; op de website van de Mathematical Association of America (MAA): *www.maa.org/news/howeulerdidit.html*

[5] Figuur 4 en de tekst in het Latijn zijn overgenomen uit: Leonhard Euler (1747/48): *Variae demonstrationes geometriae.* In: *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 1; pag. 49. Deze tekst is als pdf-bestand (ca. 520 Kb) te downloaden via: *http://eulerarchive.maa.org/pages/E135.html.* De vertaling van het Latijn naar het Nederlands is van de auteur van het artikel. Nb. Ook in Euler's tijd werd het product van de lengtes van twee lijnstukken soms aangeduid als 'de rechthoek op die twee lijnstukken'.

[6] Figuur 5 is overgenomen uit [5; pag. 50]. De letters u, v en w zijn door de auteur aan de figuur toegevoegd. Let wel: u, v en w hebben hier andere waardes dan in de paragraaf 'Tweede bewijs'.

Over de auteur

Dick Klingens is redacteur van *Euclides* (tot augustus 2013 was hij eindredacteur). Hij was tot aan zijn pensioen in 2010 als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel, en daarnaast gedurende een aantal jaren ook opleider van leraren voor het technisch beroepsonderwijs. Van 2007 tot eind 2012 was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*